Se préparer …
aux cycles préparatoires

— Filière CITI—
2024

Ce cahier d'exercices est destiné aux futurs bacheliers de filière Sciences et Technologie de Laboratoire qui souhaitent s'orienter vers des études supérieures longues.

Les cycles préparatoires

Intégrer un cycle préparatoire, c'est s'offrir la chance d'études intéressantes et de belles perspectives de métiers. C'est aussi envisager une formation riche mais exigeante.

Recette de la RÉUSSITE

- une bonne mesure de **travail** ;
- quelques cuillères de **persévérance** ;
- une pincée d'**organisation** et de **rigueur** ;
- une vraie dose de **curiosité** et d'**ouverture d'esprit**.

Se préparer

Les études supérieures sont un nouveau départ dans les études. Ainsi, vous passerez d'un élève à un étudiant ! Les attendus seront également différents entre ceux du lycée et ceux d'une classe préparatoire : les raisonnements seront au cœur de la formation : comprendre, manipuler des expressions littérales pour résoudre des problèmes, adapter les connaissances à des situations nouvelles. Vous découvrirez que la chimie a besoin de physique et de mathématiques.

Ce cahier propose quelques exercices pour vous entraîner, pour revoir, peut-être autrement, des notions abordées au lycée. Ne soyez donc pas surpris par les questions, les intitulés. Et si vous rencontrez des difficultés, persévérez et n'hésitez pas à vous faire aider. Vos efforts seront récompensés !

Bon courage et à vos crayons !

L'équipe pédagogique de la filière CITI.

CHIMIE

Attention : le but est de réaliser ces exercices sans internet ni en regardant les réponses.

TABLEAU PÉRIODIQUE

☐ **Ex. 1** – Nommer la famille des éléments de la 1 ère colonne (IA) du tableau périodique fourni en annexe.

☐ **Ex. 2** – Nommer la famille des éléments de la 2 ème colonne (IIA) du tableau périodique fourni en annexe.

☐ **Ex. 3** – Nommer la famille des éléments de la 7 ème colonne (VIIA) du tableau périodique fourni en annexe.

☐ **Ex. 4** – Nommer la famille des éléments de la 8 ème colonne (VIIIA) du tableau périodique fourni en annexe.

☐ **Ex. 5** – Nommer la famille des éléments comprise entre la colonne IIIB et la colonne IIB du tableau périodique fourni en annexe.

☐ **Ex. 6** – Nommer la famille des éléments indiquée par la flèche noire du tableau périodique fourni en annexe.

☐ **Ex. 7** – Quel est le degré d'oxydation général associé à la famille des éléments de la 1 ère colonne (IA) ?

☐ **Ex. 8** – Quel est le degré d'oxydation général associé à la famille des éléments de la 2 ème colonne (IIA) ?

☐ **Ex. 9** – Quel est le degré d'oxydation général (le plus courant) associé à la famille des éléments indiquée par la flèche noire du tableau périodique fourni en annexe ?

☐ **Ex. 10** – Donner le nom usuel/courant des composés suivants : HCl, HNO_3 , H_3PO_4 , H_2SO_4 .

☐ **Ex. 11** – Donner le nom usuel/courant des composés suivants : $NaOH$, KOH, NH_3 .

☐ **Ex. 12** – Donner le nom usuel/courant des composés suivants : CH_4, CH_3OH, CH_3COOH.

☐ **Ex. 13** – Donner le nom usuel/courant des composés suivants : $KMnO_4$ et $K_2Cr_2O_7$.

OXYDO-RÉDUCTION

□ **Ex. 14** – La réaction ci-dessous est une réaction importante de la chimie. Quelle est ce type de réaction ?
Réaction : $Cr_2O_7{}^{2-} + 14\,H^+ + 6\,e^- \rightleftarrows {}_2\,Cr_3{}^+ + 7\,H_2O$

□□ **Ex. 15** – Écrire la demi équation redox du couple suivant, en milieu acide : $MnO_4{}^-$ / Mn^{2+}.

□□ **Ex. 16** – Dans le couple $MnO_4{}^-$ / Mn^{2+}, quel est le rôle de $MnO_4{}^-$? Et quel est le rôle de Mn^{2+} ?

□□ **Ex. 17** – En une phrase à chaque fois. Quelle est la définition d'un oxydant ? Quelle est la définition d'un réducteur ?

□□ **Ex. 18** – Écrire la demi équation redox du couple suivant, en milieu acide : CO_2/ $H_2C_2O_4$.

PROBLÈMES

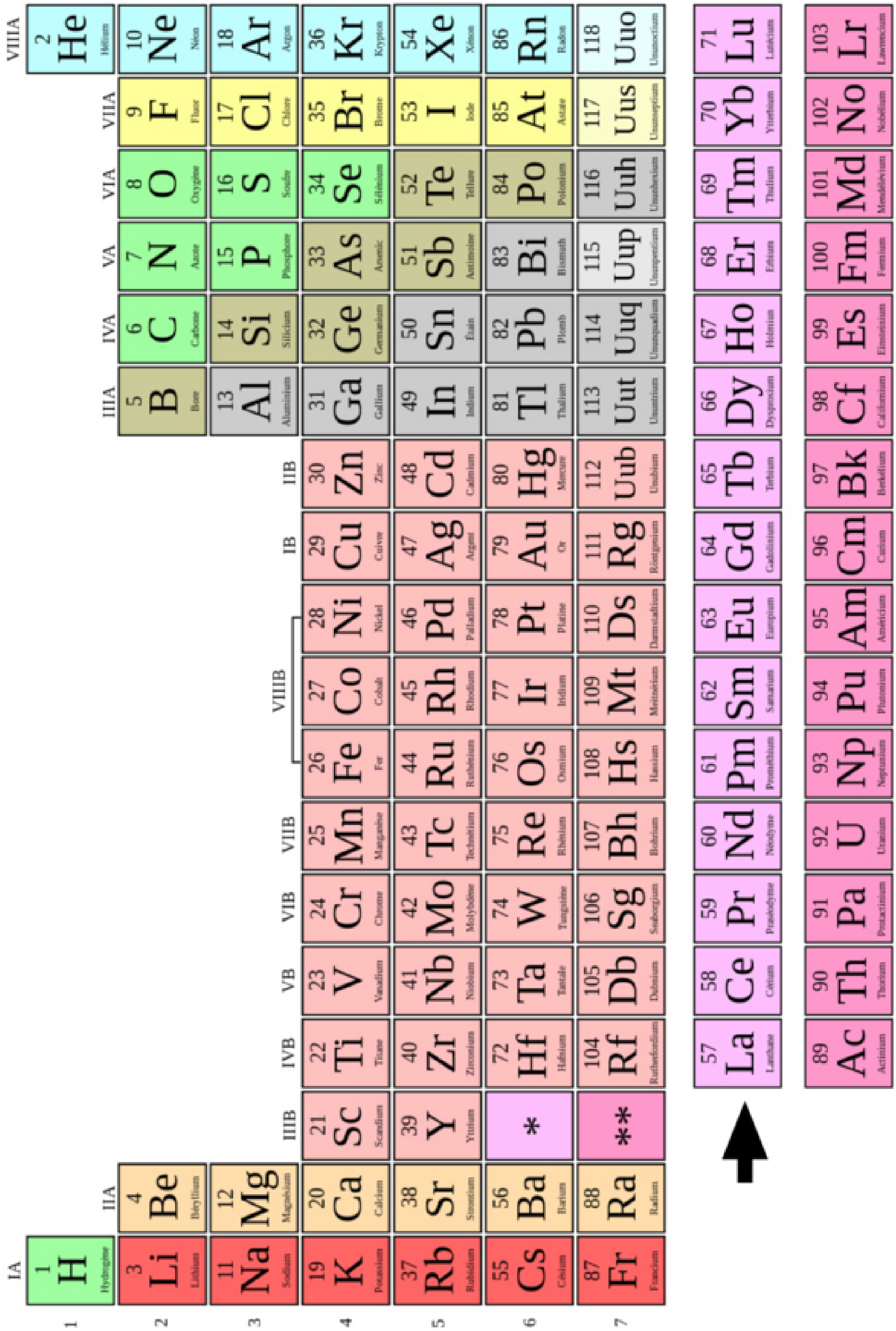
□ **Ex. 19** – On considère une solution mère aqueuse de sulfate de sodium, de concentration égale à $0{,}100\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Donner la formule du sulfate de sodium et déterminer le volume à prélever pour préparer 50 mL d'une solution de sulfate de sodium, de concentration égale à $0{,}040\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

□□□ **Ex. 20** – Un technicien possède au laboratoire , une bouteille d'acide nitrique titrant 69% en masse d'acide nitrique. La masse volumique inscrite sur la bouteille est de $1{,}410\,\mathrm{g \cdot mL^{-1}}$ à $20\,°\mathrm{C}$. À partir de cette bouteille, le technicien veut préparer $250\,\mathrm{mL}$ d'une solution (diluée) de concentration $2{,}0\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

Donner la formule de l'acide nitrique et déterminer le volume d'acide concentré que le technicien devra prélevé pour préparer la solution diluée.

□□□ **Ex. 21** – Déterminer le volume à prélever d'une solution aqueuse de sulfate d'hydrogène titrant 35% en masse et de densité $d = 1{,}84$, pour préparer $500\,\mathrm{mL}$ d'une solution de sulfate d'hydrogène diluée de concentration égale à $0{,}500\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. On donnera également la formule du sulfate d'hydrogène.

Annexe



IA IIA IIIB IVB VB VIB VIIB VIIIB IB IIB IIIA IVA VA VIA VIIA VIIIA
1 H 2 He
3 Li 4 Be 5 B 6 C 7 N 8 O 9 F 10 Ne
11 Na 12 Mg 13 Al 14 Si 15 P 16 S 17 Cl 18 Ar
19 K 20 Ca 21 Sc 22 Ti 23 V 24 Cr 25 Mn 26 Fe 27 Co 28 Ni 29 Cu 30 Zn 31 Ga 32 Ge 33 As 34 Se 35 Br 36 Kr
37 Rb 38 Sr 39 Y 40 Zr 41 Nb 42 Mo 43 Tc 44 Ru 45 Rh 46 Pd 47 Ag 48 Cd 49 In 50 Sn 51 Sb 52 Te 53 I 54 Xe
55 Cs 56 Ba * 72 Hf 73 Ta 74 W 75 Re 76 Os 77 Ir 78 Pt 79 Au 80 Hg 81 Tl 82 Pb 83 Bi 84 Po 85 At 86 Rn
87 Fr 88 Ra ** 104 Rf 105 Db 106 Sg 107 Bh 108 Hs 109 Mt 110 Ds 111 Rg 112 Uub 113 Uut 114 Uuq 115 Uup 116 Uuh 117 Uus 118 Uuo
57 La 58 Ce 59 Pr 60 Nd 61 Pm 62 Sm 63 Eu 64 Gd 65 Tb 66 Dy 67 Ho 68 Er 69 Tm 70 Yb 71 Lu
89 Ac 90 Th 91 Pa 92 U 93 Np 94 Pu 95 Am 96 Cm 97 Bk 98 Cf 99 Es 100 Fm 101 Md 102 No 103 Lr

Réponses

Ex. 1 les alcalins

Ex. 2 les alcalino-terreux

Ex. 3 les halogènes

Ex. 4 les gaz rares

Ex. 5 les métaux de transition

Ex. 6 les lanthanides (ou terres rares)

Ex. 7 $+1$

Ex. 8 $+2$

Ex. 9 $+3$

Ex. 10 acide chlorhydrique, acide nitrique, acide phosphorique et acide sulfurique

Ex. 11 soude (hydroxyde de sodium), potasse (hydroxyde de potassium) et ammoniac

Ex. 12 méthane, méthanol, acide éthanoïque ou acide acétique

Ex. 13 permanganate de potassium et di- ou bichromate de potassium

Ex. 14 1/2 équation d'oxydo-réduction

Ex. 15 $MnO_4^- + 8\,H^+ + 5\,e^- \longrightarrow Mn^{2+} + 4\,H_2O$

Ex. 16 MnO_4^- est un oxydant et Mn^{2+} est un réducteur.

Ex. 17 Un oxydant est une espèce chimique susceptible de capter des électrons. Un réducteur est une espèce chimique susceptible de céder des électrons.

Ex. 18 $2\,CO_2 + 2\,H^+ + 2\,e^- \longrightarrow H_2C_2O_4$

Ex. 19 Na_2SO_4 et $V_{concentre} = 20{,}0\,\mathrm{mL}$

Ex. 20 HNO_3 et $V_{\mathrm{concentre}} = 32{,}5\,\mathrm{mL}$ et $C_{HNO_3,concentre} = 15{,}4\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

Ex. 21 H_2SO_4 et $V_{\mathrm{concentre}} = 38{,}1\,\mathrm{mL}$ et $C_{H_2SO_4,concentre} = 5{,}57\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

OUTILS MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE

PRÉREQUIS – Notion de fonction, variable et paramètre, identification de paramètre, calcul élémentaire.

□ **Ex. 1** – Soit un projectile lancé d'une hauteur h avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec l'horizontale et soumis à la seule force de pesanteur (intensité de la pesanteur g). Le temps t_i que met ce projectile pour atteindre le sol vérifie l'équation suivante :

$$-\frac{1}{2}g{\cdot}t_\mathrm{i}^2 + v_0{\cdot}\sin(\alpha){\cdot}t_\mathrm{i} + h = 0$$

Mettre cette équation sous la forme $t_\mathrm{i}^2 + a{\cdot}t_\mathrm{i} + b = 0$ et donner l'expression de a et b.

□ **Ex. 2** – L'équation différentielle régissant le mouvement rectiligne d'un objet de masse m relié à un bâti fixe par un ressort de raideur k peut se mettre sous la forme

$$m{\cdot}x''(t) + k{\cdot}x(t) = k{\cdot}d$$

où $x(t)$ désigne la position de l'objet, t le temps et d la position de l'objet au repos.

Mettre cette équation sous la forme canonique suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2}{\cdot}x''(t) + x(t) = x_0$$

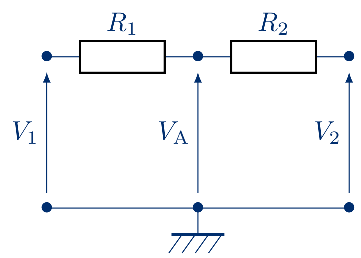
et préciser les expressions des paramètres ω_0 et x_0.

□ **Ex. 3** – La période d'un pendule oscillant (masse reliée par un fil à un point fixe), de longueur ℓ dans un champ de pesanteur d'intensité g s'écrit en bonne approximation $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Donner l'expression de ℓ pour que la période soit égale à une valeur particulière T_1. Faire l'application numérique si $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $T_1 = 1{,}25\,\mathrm{s}$.

□ **Ex. 4** – Le potentiel électrique V_A, d'un point A relié à deux résistances R_1 et R_2 soumises, sur leur autre borne aux potentiels respectifs V_1 et V_2 (voir schéma) peut s'exprimer de la façon suivante :

$$V_A = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$



(a) R_1, R_2 et V_1 étant fixés, comment doit-on choisir V_2 pour imposer une valeur de V_A souhaitée ? Application numérique avec $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $V_1 = 3\,\mathrm{V}$ et $V_\mathrm{A} = 3{,}5\,\mathrm{V}$.

(b) R_1, V_1 et V_2 étant fixés, comment doit-on choisir R_2 pour imposer une valeur de V_A souhaitée ? Application numérique avec $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $V_1 = 3\,\mathrm{V}$, $V_2 = 12\,\mathrm{V}$ et $V_\mathrm{A} = 5\,\mathrm{V}$.

GÉOMÉTRIE

□ **Ex. 5** – Une boite cubique présente un volume de 125 mL. Calculer son arête en cm. Que vaut sa grande diagonale (distance entre des sommets opposés) ?

□ **Ex. 6** – La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux petits côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?

□ **Ex. 7** – Un triangle présente une aire de 100 cm^2. Sa base est double de sa hauteur. Combien mesure sa base ?

□ **Ex. 8** – Le périmètre d'un rectangle mesure 28 mètres alors que sa diagonale mesure 10 mètres. Calculer son aire (en m^2).

□ **Ex. 9** – Soit un poteau de hauteur H avec une corde fixée à son sommet. La corde est plus longue que le poteau de sorte que lorsqu'elle pend à la verticale elle a un mètre de plus que le poteau. Quand on la tend, en tirant dessus, elle touche le sol à 1 m 50 du pied du poteau. Que vaut H ?

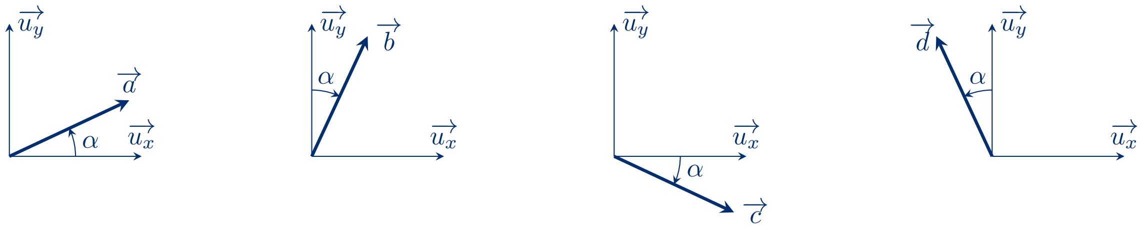
□ **Ex. 10** – On considère un tube à essai (demi-sphère surmontée d'un cylindre) en verre de diamètre intérieur 1 cm et d'épaisseur 0,7 mm. Le volume maximal qu'il peut contenir est de 8 mL.

1 Déterminer la hauteur de la partie cylindrique.

2 Quelle est la masse du tube à essai.

| **Données** : Densité du verre : $d = 2{,}5$

□ **Ex. 11 Projections** – On considère les vecteurs suivants :



Décomposer dans la base $(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$ les vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ (on fera intervenir l'angle α et les normes des vecteurs notées a, b, c et d).

GRANDEURS PHYSIQUES

PRÉREQUIS – les unités du système international, conversion d'unités, dimension, géométrie élémentaire, etc.

□ **Ex. 12** – Écrire les longueurs suivantes en mètre et en écriture scientifique.

(a) 1 dm
(b) 3,5 hm
(c) 3 mm
(d) 15 km
(e) 72 fm
(f) 0,72 nm
(g) 234 cm
(h) 0,7 pm

□ **Ex. 13** – La vitesse de la lumière dans le vide vaut $c = 3{,}0.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Convertir c en $\mathrm{km.h^{-1}}$.

□ **Ex. 14** – Peut-on faire tenir 150 mL d'huile dans un flacon de $2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3}$?

□ **Ex. 15** – Donner l'unité SI (Système international d'unités) des grandeurs suivantes :

La puissance électrique, la pression, la masse volumique, le travail d'une force, la vergence d'une lentille, l'indice de réfraction, la concentration molaire

□□ **Ex. 16** – On cherche à exprimer le volume V d'un tronc conique en fonction de sa hauteur h, son rayon minimum r et son rayon maximum R. Après analyse et résolution du problème, quatre étudiants obtiennent quatre résultats différents. Indiquer le ou les résultats qui ont le mérite d'être homogènes.

○ $V = 2\pi(R-r)\dfrac{h}{3}$

○ $V = \dfrac{\pi h}{3}\left(r^2 - R + R^2\right)$

○ $V = \dfrac{\pi h}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right)$

○ $V = \dfrac{\pi h}{3}\left(r - \dfrac{r}{R}\right)^2$

MÉCANIQUE

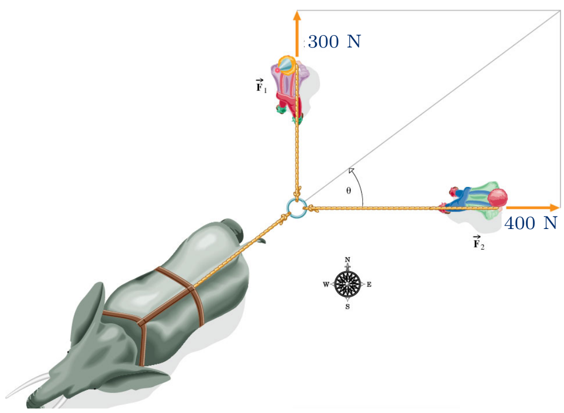
PRÉREQUIS – vitesse, accélération, bilan des forces, corps en équilibre, principe fondamental de la dynamique, ….

□ **Ex. 17** – Un cycliste parcoure une distance de 20 km. Il franchi les 10 premiers km à la vitesse moyenne de $22\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Il termine son trajet à la vitesse moyenne de $25\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Quelle est sa vitesse moyenne sur la deuxième partie du trajet.

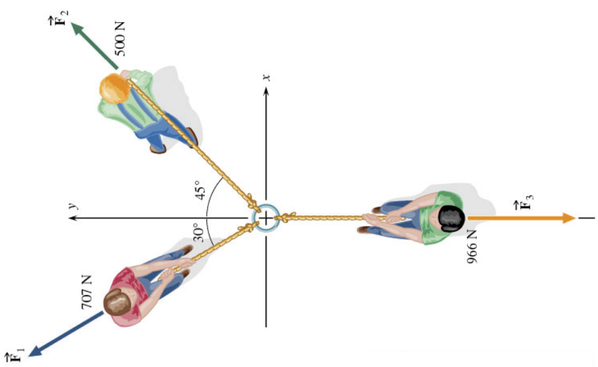
□ **Ex. 18** – Le Paris-Rennes quitte la gare Montparnasse à 8h32, il roule à la vitesse supposée constante $v_1 = 280\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Le Rennes-Paris quitte la gare de Rennes à 8h50, il roule à la vitesse supposée constante $v_2 = 295\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. À quelle heure se croisent-ils et à quelle distance de la gare de Rennes ?

| **Données** : On considérera que la distance Rennes-Paris par rail est $D = 360\,\mathrm{km}$.

□ **Ex. 19** – Deux clowns tirent sur un éléphant immobile comme le montre la figure. Quelle est l'intensité de la tension exercée par l'éléphant sur sa corde ?



□ **Ex. 20** – Trois hommes tirent chacun sur une corde attachée à un anneau de masse négligeable, comme l'indique la figure ci-dessous.



L'anneau est-il en équilibre mécanique ?

□ **Ex. 21** – À l'aide du principe fondamental de la dynamique (2^{nde} loi de Newton), déterminer la force de frottement exercée par l'air sur un corps de 2 kg s'il tombe verticalement avec une accélération de $9\,\text{m.s}^{-2}$.

| **Données** : on prendra $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

□ **Ex. 22** – Un homme de 80 kg se trouve debout sur un pèse-personne, dans un ascenseur. L'ascenseur monte avec une accélération $a = 2\,\text{m.s}^{-2}$. Qu'indique le pèse-personne?

| **Données** : on prendra $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

□ **Ex. 23 Profondeur d'un puit** – Pour connaître la profondeur h d'un puits, on lâche une pierre sans vitesse initiale depuis le haut du puits et on mesure la durée Δt entre le moment où la pierre est lâchée et le moment où l'on entend le bruit de l'impact de la pierre avec la surface de l'eau. On mesure $\Delta t = 2{,}0\,\text{s}$. Sachant que la pierre tombe avec une accélération $a = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ et que la vitesse du son dans l'air vaut $c_{\text{s}} = 340\,\text{m.s}^{-1}$, déterminer la hauteur du puits.

SYSTÈMES ET PROCÉDÉS

PRÉREQUIS – Notion de résistance thermique, coefficient de performance d'une pompe à chaleur, relation de BERNOULLI.

□ **Ex. 24** – Un hangar, assimilable à un parallélépipède rectangle de longueur $L = 20\,\mathrm{m}$, de largeur $\ell = 10\,\mathrm{m}$ et de hauteur $h = 5\,\mathrm{m}$ est chauffé à l'aide d'une pompe à chaleur de coefficient de performance égal à 4. Les murs et le toit sont en béton d'une épaisseur $e_\mathrm{b} = 10\,\mathrm{cm}$, isolés d'une épaisseur $e_\mathrm{p} = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ de polystyrène expansé. On néglige les pertes thermiques par le sol.

1 On souhaite y maintenir une température de $20\,°\mathrm{C}$ alors qu'il règne à l'extérieur une température de $5\,°\mathrm{C}$. Quelle est la puissance électrique consommée par la pompe à chaleur ?

2 Quel puissance supplémentaire sera consommée si l'air intérieur du hangar doit être renouvelé de telle façon que la totalité de l'air intérieur est remplacé par de l'air frais en 4 heures ?

Données :
Résistance thermique d'une surface plane, de surface S, d'épaisseur e constituée d'un matériaux de conductivité thermique λ : $\mathscr{R} = \dfrac{e}{\lambda \cdot S}$
Conductivité thermique du béton $\lambda_\mathrm{b} = 1{,}75\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
Conductivité thermique du polystyrène expansé $\lambda_\mathrm{p} = 0{,}033\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
Capacité thermique massique de l'air : $c = 1000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$
Masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}29\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

□ **Ex. 25** – Un réservoir d'eau de grande capacité est raccordé à un tuyau de section $s = 4{,}0\,\mathrm{cm^2}$.

1 Quel est le débit en sortie de tuyau si l'extrémité de celui-ci est placée 2,0 m en dessous de la surface libre de l'eau dans le réservoir ?

Pour maintenir le niveau d'eau dans le réservoir, on équipe le réservoir d'un système d'un capteur permettant de commander une pompe. Celle-ci prélève l'eau dans un étang situé 8 m en contrebas du réservoir.

2 Quelle est la puissance minimale de la pompe pour que celle-ci puisse assurer un débit supérieur à celui en sortie du tuyau ?

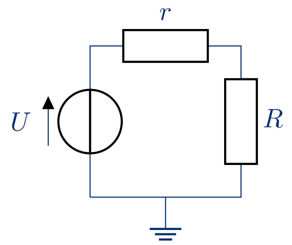
ÉLECTRICITÉ

PRÉREQUIS – Loi des mailles, loi des nœuds, loi d'OHM, puissance.

□ **Ex. 26** – On considère le montage ci-dessous à droite.

1 Donner l'expression de la puissance dissipée dans la résistance R.

2 Les valeurs de U et r étant fixée, quelle valeur faut-il donner à R pour que cette puissance soit maximale ?



Réponses

Ex. 1 $a = -\dfrac{2v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$ et $b = -\dfrac{2h}{g}$.

Ex. 2 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $x_0 = d$.

Ex. 3 $\ell = \dfrac{g \cdot T_1^2}{4\pi^2} = 39\,\text{cm}$.

Ex. 4

(a) $V_2 = R_2 \left(V_\text{A} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V_1}{R_1} \right) = 4{,}5\,\text{V}$

(b) $R_2 = 3{,}5\,\text{k}\Omega$

Ex. 5 Coté : $a = 5\,\text{cm}$
Diagonale : $d = a \cdot \sqrt{3} = 8{,}7\,\text{cm}$

Ex. 6 $L = 294{,}2$ m

Ex. 7 20 cm.

Ex. 8 48 m^2.

Ex. 9 $H = 62{,}5\,\text{cm}$.

Ex. 10

1 9,85 cm ;

2 6,1 g.

Ex. 11

- $\overrightarrow{a} = a\cos(\alpha)\overrightarrow{u_x} + a\sin(\alpha)\overrightarrow{u_y}$
- $\overrightarrow{b} = b\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x} + b\cos(\alpha)\overrightarrow{u_y}$
- $\overrightarrow{c} = c\cos(\alpha)\overrightarrow{u_x} - c\sin(\alpha)\overrightarrow{u_y}$
- $\overrightarrow{d} = -d\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x} + d\cos(\alpha)\overrightarrow{u_y}$

Ex. 12

(a) $1 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$

(b) $3{,}5 \cdot 10^{2}\,\text{m}$

(c) $3 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$

(d) $1{,}5 \cdot 10^{4}\,\text{m}$

(e) $7{,}2 \cdot 10^{-14}\,\text{m}$

(f) $7{,}2 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$

(g) $2{,}34\,\text{m}$

(h) $7 \cdot 10^{-13}\,\text{m}$

Ex. 13 $c = 1{,}1.10^9\,\text{km.h}^{-1}$

Ex. 14 Oui.

Ex. 15 La puissance s'exprime en watt (W), la pression en pascal (Pa), la masse volumique en kilogramme par mètre cube (kg.m^{-3}), le travail d'une force en joule (J), la vergence d'une lentille en dioptrie (δ), l'indice de réfraction est sans unité et la concentration molaire en mole par mètre cube (mol.m^{-3}).

Ex. 16 $V = \dfrac{\pi h}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right)$.

Ex. 17 $29\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$

Ex. 18 Les trains se croisent 46,8 min après le départ du premier train, à une distance de 218,4 km de Rennes.

Ex. 19 500 N.

Ex. 20 Oui.

Ex. 21 1,6 N.

Ex. 22 96,3 kg

Ex. 23 $h = 18{,}5\,\text{m}$

Ex. 24

1 $\mathscr{P}_\text{elec} = 1{,}2\,\text{kW}$

2 $\mathscr{P}_\text{elec,sup} = 0{,}34\,\text{kW}$

Ex. 25

1 $D = 2{,}5\,\text{L} \cdot \text{s}^{-1}$ (en négligeant la vitesse de l'eau à la surface du réservoir et les pertes de charge)

2 $\mathscr{P} = 197\,\text{W}$ (en négligeant la vitesse de l'eau à la surface du réservoir et de l'étang ainsi que les pertes de charge)

Ex. 26

1 $\mathscr{P} = \dfrac{R \cdot U^2}{(R+r)^2}$

2 $R = r$

MATHÉMATIQUES

Les mathématiques ne sont pas seulement une matière en soi, mais aussi un outil pour la modélisation de problèmes en physique, chimie, économie ou autre! Il est donc indispensable d'en maîtriser les aspects les plus techniques.
Le but des exercices qui suivent est de revoir certaines choses au programme de la fin du collège jusqu'au lycée : calculer avec des puissances, factoriser, développer, simplifier des expressions, résoudre des équations simples, revoir les notions de trigonométrie, étudier rapidement des fonctions, calculer des dérivées et des primitives ou intégrales.
Ces exercices doivent être résolus complètement de manière rapide, mis à part ceux notés □□□, qui eux nécessitent un peu plus de réflexion. Comme dans beaucoup de choses, l'important ici est l'entraînement !

CALCULS ALGÉBRIQUES

PRÉREQUIS – outils de calculs vus au collège et au lycéee.

□ **Ex. 1** – Calculer:

(a) $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$ (c) $\frac{12}{5}\times\frac{10}{3}-\frac{1}{2}$

(d) $\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{5}\right)$ (e) $\frac{3}{2}\times\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}$ (f) $\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{8}\right)\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)$

□ **Ex. 2** – Écrire $\frac{5}{3}+\frac{1}{2}$ sous la forme $n+\frac{a}{b}$ où n est entier et $\frac{a}{b}$ est un rationnel entre 0 et 1.

□ **Ex. 3** – Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres: $A=\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}$, $B=\frac{3}{4}+7$, $C=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{35}}$.

□ **Ex. 4** – Simplifier les nombres suivants (où $a,b>0$) :

(a) $\dfrac{4^{(3^2)}}{(2^3)^4}$ (b) $\dfrac{a^7b^3}{a^4b^{-2}}$ (c) $\left(\dfrac{(2a^4)^2(5a^6)}{(2a^2)^4}\right)^2$ (d) $\sqrt{a^{7/2}a^{5/2}a^{3/2}a^{1/2}}$ (e) $\dfrac{(2^{2n+1})^2}{2^{2n-1}}$

□ **Ex. 5** – Développer et ordonner les expressions suivantes :

(a) $(x^2-1)(x^2-4x+3)$ (b) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ (c) $(x+1)^3-(x-1)^3$

(d) $(x+1)^3+(x-1)^3$ (e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ (f) $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

□ **Ex. 6** – Simplifier les fractions rationnelles suivantes en les écrivant comme quotient de deux polynômes :

(a) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$ (b) $x+1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$ (c) $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

(d) $\dfrac{\frac{x}{2}+4x}{x\times\frac{3x+2}{4-4x}}$ (e) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ (f) $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{4(x-2)-\frac{5}{4x}-\frac{1}{2x^2}}$

□ **Ex. 7** – Rationaliser le dénominateur des expressions suivantes :

$$(a)\quad \frac{2\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}} \qquad (b)\quad \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} \qquad (c)\quad \frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \qquad (d)\quad \frac{1}{1+x+\sqrt{x+2}}$$

ÉQUATIONS

Prérequis – équations, notion de valeur absolue, suites

□ **Ex. 8** – Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$(a)\quad 5x+1=-2x-2 \qquad (b)\quad 9x+8=3x-10 \qquad (c)\quad 6x+11=-4x-1$$
$$(d)\quad \sqrt{x}(x-4)=0 \qquad (e)\quad x(x-2)=0 \qquad (f)\quad (x-1)(x+2)=0$$

□ **Ex. 9** – Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations du second degré suivantes :

$$(a)\quad x^2+2x+1=0 \qquad (b)\quad x^2-4=0 \qquad (c)\quad x^4-2x^2=-1$$

| **Indication** : Penser à trouver une racine évidente ou avec une identité remarquable.

□ **Ex. 10** – Résoudre les équations suivantes, en précisant au préalable l'ensemble d'étude.

$$(a)\quad \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x+1}=0 \qquad (b)\quad \tfrac{1}{x+1}=0 \qquad (c)\quad x^2-2x+1=(x-3)^2$$

□□ **Ex. 11** – Résoudre les trois équations suivantes :

$$(a)\quad 2\,|x-2|=7 \qquad (b)\quad |x-2|=\tfrac{x+2}{2} \qquad (c)\quad \left|x^2+2x+1\right|=4$$

| **Indication** : Il faut toujours se débarrasser des valeurs absolues avec la règle $|a|=a$ si $a\geq 0$ et $|a|=-a$ si $a\leq 0$ où $a\in\mathbb{R}$. On est alors ramené à résoudre des équations plus simples sur des intervalles donnés.

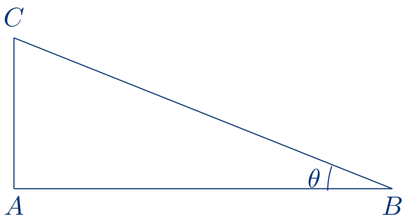
□□□ **Ex. 12** – Pour chacune des équations suivantes, déterminer pour quels réels x l'équation a un sens:

$$(a)\quad \tfrac{3}{x+1}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{2}{3x+3} \qquad (b)\quad e^{2x}-2e^x+1=0 \qquad (c)\quad \ln x+\ln(x-3)=\ln(2x)$$

TRIGONOMÉTRIE

PRÉREQUIS – formules élémentaires de trigonométrie, fonctions sinus et cosinus.

□ Ex. 13 –



ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = 2$ cm et $BC = 6$ cm. Calculer la mesure de l'angle θ.

□ Ex. 14 –

1 Rappeler les valeurs de $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$.

2 En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$ en utilisant une formule de linéarisation.

3 Déterminer alors la valeur de $\sin\frac{\pi}{8}$.

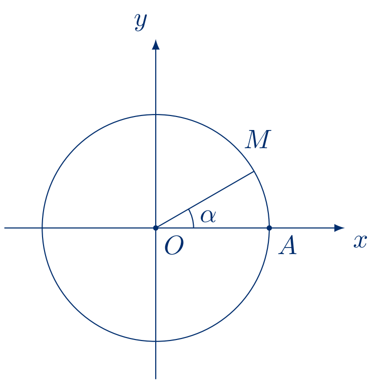
□ Ex. 15 –

1 Simplifier $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et en déduire une expression de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2 En procédant comme dans l'exercice précédent, déterminer une seconde expression de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3 Vérifier dans chacun des cas l'égalité des deux expressions obtenues.

□□ Ex. 16 –



M est un point du cercle trigonométrique défini par $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = \alpha$ avec $\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

1 Placer sur le cercle trigonométrique :

a Le point M_1 tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$;

b Le point M_2 tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_2}) = \pi - \alpha$.

2 On donne $\alpha = \frac{\pi}{10}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

a Calculer la valeur exacte de $\cos\alpha$.

b Donner les valeurs exactes de $\sin\left(-\frac{9\pi}{10}\right)$ et de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
(Aide : $\frac{\pi}{10} - \pi = -\frac{9\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$).

□□□ Ex. 17 – Résoudre sur $[0,\pi]$, puis sur $[0,2\pi]$ et $\mathbb{R}$, les équations trigonométriques suivantes d'inconnues x:

$$(a)\quad 2\cos x = 1 \qquad (b)\quad 2\sin x = -\sqrt{2} \qquad (c)\quad \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

AUTOUR DES FONCTIONS

PRÉREQUIS – notions de fonctions, de dérivation et d'intégration vues au lycée.

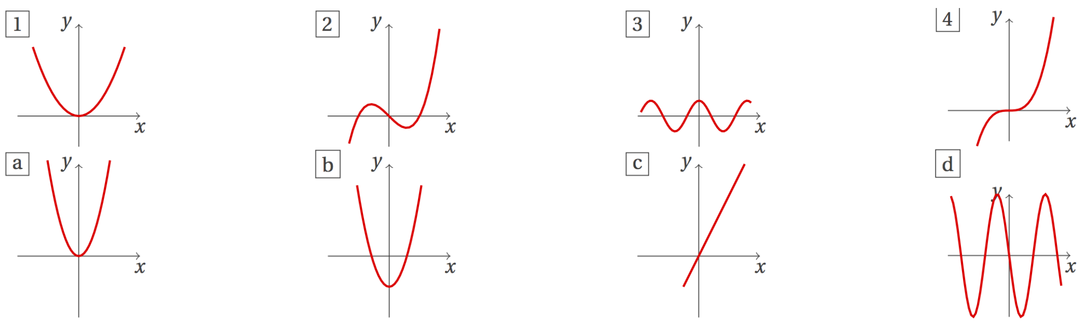
□ **Ex. 18** – Pour chaque fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous, indiquer son **domaine de définition** puis tracer *à main levée* les courbes représentatives :

(a) $f(x) = 1 - x^2$
(b) $f(x) = (x+1)^2$
(c) $f(x) = \sqrt{x+1}$
(d) $f(x) = \sqrt{x} - 1$
(e) $f(x) = \ln(-x)$
(f) $f(x) = \ln(x-1)$
(g) $f(x) = \mathrm{e}^{x-1}$
(h) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
(i) $f(x) = 1 + \cos 2x$
(j) $f(x) = |-x|$
(k) $f(x) = -|x|$
(l) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
(m) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$
(n) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x)$
(o) $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x}$
(p) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x}$
(q) $f(x) = \sqrt{|x|}$
(r) $f(x) = \ln(|x|)$

□ **Ex. 19** – Calculer la dérivée des fonctions suivantes (attention à la variable !)

(a) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
(b) $f(t) = 4t^3 + 2t - 1$
(c) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3+3x-7}$
(d) $h(x) = \ln(2x+1)$
(e) $\psi(\theta) = \sqrt{5\theta + 2}$
(f) $i(t) = \sin(5t)\cos(10t)$
(g) $z(t) = 5\mathrm{e}^{-t/10}\cos(10t)$
(h) $f(z) = z\mathrm{e}^{2z}$

□ **Ex. 20** – Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.



□ **Ex. 21** – Trouver l'équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ en $x = 1$. Tracer la parabole et sa tangente.

□□ **Ex. 22** – On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

(a) Représenter son graphe.
(b) Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction f en $x = 0$.
(c) Idem en $x = 1$.

□□ **Ex. 23** – Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes:

1 ensemble de définition

2 comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes

3 extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations

4 graphe

□□ **Ex. 24** – Le graphe de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + 3$ passe par le point (2,0). La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$. Trouver a et b.

□ **Ex. 25** – Calculer les primitives des fonctions données par les expressions suivantes :

(a) $2x^3 - 3x + 1$

(b) $x^2 + \frac{2}{x^2}$

(c) e^{x+1}

(d) $\sin(3x + 2)$

(e) $x\,\mathrm{e}^{x^2}$

(f) $\dfrac{\ln^3 x}{x}$

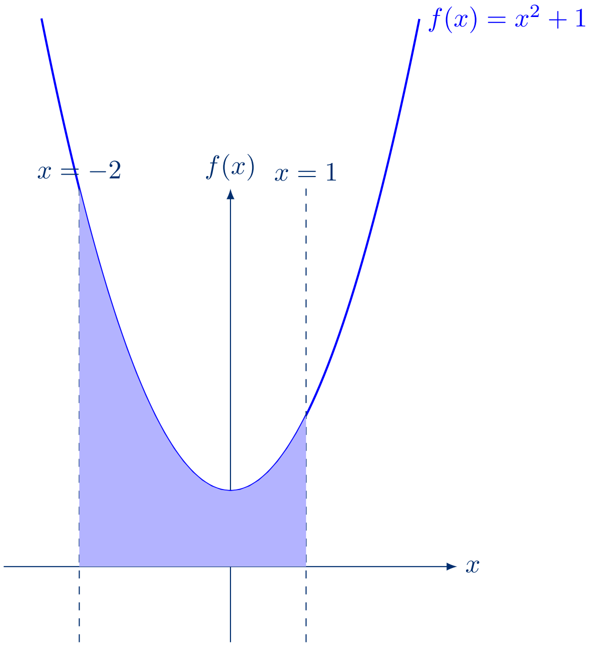
(g) $\dfrac{x}{x^2 + 2}$

(h) $\cos(4x + 5)$

(i) $\tan(x)$

□□ **Ex. 26** –

Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2+1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.



Réponses

Ex. 1

$(a)\ 1 \quad (b)\ \frac{1}{3} \quad (c)\ \frac{15}{2}$

$(d)\ \frac{-1}{10} \quad (e)\ \frac{9}{5} \quad (f)\ -\frac{11}{60}$

Ex. 2

$$2+\frac{1}{6}$$

Ex. 3

$$A=\frac{1}{21}\quad B=\frac{31}{4}\quad C=21$$

Ex. 4

$(a)\ 64 \quad (b)\ a^3b^5 \quad (c)\ \frac{25}{12}a^{12}$

$(d)\ a^4 \quad (e)\ 2^{2n+3}$

Ex. 5

$(a)\ x^4-4\,x^3+2\,x^2+4\,x-3$

$(b)\ x^4-1$

$(c)\ 6x^2+2$

$(d)\ 2x^2+6x$

$(e)\ x^5-x^3-x^2+1$

$(f)\ 1$

Ex. 6

$(a)\ -\dfrac{2}{x^2-1}$

$(b)\ \dfrac{x^3+x^2+x-2}{x^2}$

$(c)\ -\dfrac{1}{x\,(x+h)}$

$(d)\ \dfrac{18\,(1-x)}{3x+2}$

$(e)\ \dfrac{x+y}{y-x}$

$(f)\ \dfrac{20\,x^4-32x^3-x^2-2x}{16x^5-32x^4+11x^3-34x^2-5x-2}$

NB : pour (f), la façon la plus simple et la plus rapide pour traiter le calcul est la suivante :

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{4\,(x-2)-\dfrac{5}{4x}-\dfrac{1}{2x^2}}=$$

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{4\,(x-2)-\dfrac{5}{4x}-\dfrac{1}{2x^2}}\times\frac{4x^2}{4x^2}=\dots$$

Ex. 7

$(a)\ \dfrac{3\sqrt{2}-2}{2} \quad (b)\ \dfrac{(x+1)}{1+\sqrt{x}}$

$(c)\ \dfrac{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b} \quad (d)\ \dfrac{1+x-\sqrt{x+2}}{x^2+x-1}$

Ex. 8

$(a)\ \frac{-3}{7} \quad (b)\ -3 \quad (c)\ \frac{-6}{5}$

(d) 0 et 4 $\quad (e)$ 0 et 2 $\quad (f)$ -2 et 1

Ex. 9

$(a)\ -1 \quad (b)\ \pm 2 \quad (c)\ \pm 1$

Ex. 10

$(a)\ \frac{-1}{2} \quad (b)$ pas de solution. $\quad (c)\ 2$

Ex. 11

$(a)\ -\frac{3}{2}$ et $\frac{11}{2} \quad (b)\ \frac{2}{3}$ et 6 $\quad (c)\ -3$ et 1

Ex. 12

(a) l'équation n'a de sens que si $x\neq -1$ et admet une unique solution $\frac{11}{3}$

(b) l'équation a un sens sur $\mathbb{R}$ et admet une unique solution solutions 0

(c) l'équation n'a de sens que si $x>3$. et admet une unique solution 5

Ex. 13

1 $19.5°$

Ex. 14

1 $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, d'où on déduit que

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

3 Utiliser la même méthode en linéarisant $\sin^2\theta$ ou la relation $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. On obtient que $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Ex. 15

1 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$. Utiliser alors les formules donnant $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$ pour obtenir

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad\text{et}\quad\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

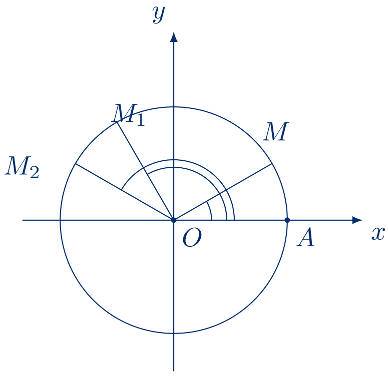
2 De $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}$, on déduit que

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$$

Même chose pour le $\sin \frac{\pi}{12}$.

3 On peut comparer les carrés.

Ex. 16



1 **a** $M_1 = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$

b $M_2 = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_2}) = \pi - \alpha$

2 **a** Pour tout réel x, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Donc, on a : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \left(\frac{\pi}{10}\right) = 1$

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\\ &= 1 - \frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\\ &= 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}\\ &= \frac{16-6+2\sqrt{5}}{16}\\ &= \frac{10+2\sqrt{5}}{16}\\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{8}\end{aligned}$$

Donc, on a $\cos\alpha = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{10}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

b $\sin\left(-\frac{9\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$
Donc :
$\sin\left(-\frac{9\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
On a également :
$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right)$
$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$
Donc, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Ex. 17

(a) Le plus simple est de dessiner le cercle trigonométrique et repérer les angles ayant pour cosinus $\frac{1}{2}$:
- sur $[0,\pi]$, une unique solution $\frac{\pi}{3}$;
- sur $[0,2\pi]$, deux solutions $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$;
- sur $\mathbb{R}$, une infinité de solutions $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k\mathbb{Z}\right\}$

(b) Le plus simple est de dessiner le cercle trigonométrique et repérer les angles ayant pour sinus $-\frac{\sqrt{2}}{2}$:
- sur $[0,\pi]$, il n'y a pas de solution;
- sur $[0,2\pi]$, deux solutions $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$;
- sur $\mathbb{R}$, une infinité de solutions $\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k\mathbb{Z}\right\}$

(c) Même chose, commencer par faire un dessin. Attention, le schéma donne les valeurs possibles de $2x$.
- sur $[0,\pi]$, deux solutions $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$;
- sur $[0,2\pi]$, quatre solutions $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$;
- sur $\mathbb{R}$, on a une infinité de solutions données par

  $$2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou } 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

  soit $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{8} + k\pi, k\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{8} + k\pi, k\mathbb{Z}\right\}$. Il y a donc 4 solutions distinctes sur chaque tour de cercle.

Ex. 18 Vous pouvez vous aider d'un traceur de courbe quelconque ou encore consulter le site `www.wolframalpha.com`.

Ex. 19

(a) $g'(x) = -\frac{3}{2}x^{-5/2}$.
(b) $f'(t) = 12t^2 + 2$.
(c) $f'(x) = -\dfrac{x^4+6x^2+14x+9}{(x^3+3x-7)^2}$.
(d) $h'(x) = \frac{2}{2x+1}$.
(e) $\psi' = \dfrac{5/2}{\sqrt{5\theta+2}}$.
(f) $i'(t) = 5\cos(5t)\cos(10t) - 10\sin(10t)\sin(5t)$.
(g) $z'(t) = -\mathrm{e}^{-t/10}\,[1/2\cos(10t) + 50\sin(10t)]$.
(h) $f'(z) = (1+2z)\mathrm{e}^{2z}$.

Ex. 20 (1)-(c), (2)-(b), (3)-(d), (4)-(a).

Ex. 21 $y = 2x$.

Ex. 22 (b) $y = 4x$. (c) $y = 2$.

Ex. 23

1 *Ensemble de définition:* il faut $x^2 - 1 > 0$ donc

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$

2 *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition:* $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x\left(1 + \frac{\ln(x^2-1)}{x}\right) = -\infty$,
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} 1 + \frac{\ln(x^2-1)}{x} = 1$,
$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to \pm\infty} \ln(x^2-1) = +\infty$.
Il n'y a pas d'asymptotes en $\pm\infty$.

3 *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations:* la dérivée de f est l'application

$$f'(x) = \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{x^2-1}$$

Dans $\mathcal{D}_f$ on a

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]-\infty; -1-\sqrt{2}[\cup]1; +\infty[,$$
$$f'(x) = 0 \text{ ssi } x = -1-\sqrt{2},$$
$$f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]-1-\sqrt{2}; -1[.$$

On conclut que

- f est strictement croissante sur $]-\infty; -1-\sqrt{2}[$ et sur $]1; +\infty[$,
- f est strictement décroissante sur $]-1-\sqrt{2}; -1[$,
- $x = -1-\sqrt{2}$ est un point de maximum local et on a $f(-1-\sqrt{2}) = -1-\sqrt{2} + \ln(2+2\sqrt{2})$.

Ex. 24 $a = \dfrac{9}{4}$ et $b = -6$.

Ex. 25

(a) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + \mathrm{C^{te}}$.
(b) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{x} + \mathrm{C^{te}}$.
(c) $\mathrm{e}^{x+1} + \mathrm{C^{te}} + \mathrm{C^{te}}$.
(d) $-\frac{1}{3}\cos(3x+2) + \mathrm{C^{te}}$.
(e) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{C^{te}}$.
(f) $\frac{1}{4}\ln^4 x + \mathrm{C^{te}}$.
(g) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \mathrm{C^{te}}$.
(h) $\frac{1}{4}\sin(4x+5) + \mathrm{C^{te}}$
(i) $-\ln|\cos(x)| + \mathrm{C^{te}}$

Ex. 26 $\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx = 5$